

## СТАТЬИ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И  
УПРАВЛЕНИЕ

Статья поступила в редакцию: 05.08.2026

Статья принята к публикации: 09.08.2026

Статья опубликована: 28.08.2026

УДК 623.442.58:519.224.2

DOI: 10.32743/UniTech.2026.149.8.23285

**Оценка кучности спортивной винтовки по экстремальному размеру группы**

**Богословский Владимир Николаевич**

д-р. техн. наук

Российская Федерация, г. Москва

E-mail: vnbog@mail.ru

**Assessment of competition rifle precision using shot-group extreme spread**

**Bogoslovsky Vladimir Nikolaevich**

Dr. Tech. Sci

Russian Federation, Moscow

**Аннотация**

Статья отвечает на практические вопросы: сколько групп и сколько выстрелов в группе достаточно для оценки кучности спортивной винтовки, какой будет средний размер группы и размер очередной группы, как связан размер групп с кучностью спортивной винтовки и вероятностью попадания в цель. В статье построена точная вероятностная модель экстремального размера группы (extreme spread, ES), который остается наиболее распространенным показателем кучности спортивной винтовки. Распределение ES получено прямым статистическим моделированием исходного двумерного нормального распределения попаданий. С использованием генератора PCG64DXSM рассчитаны распределения групп по 3, 5, 10 и 100 выстрелов, а также центральные 80 %-е доверительные интервалы истинного

---

**Библиографическое описание:** Богословский В.Н. Оценка кучности спортивной винтовки по экстремальному размеру группы // Universum: технические науки : электрон. научн. журн. 2026. 8(149). URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/23285>

среднего размера и прогнозные интервалы размера следующей независимой группы для числа исходных групп от 1 до 10. Показано, что для инженерных оценок распределения размера групп подходят обобщенное распределение экстремальных значений GEV и двухпараметрическое гамма-распределение.

Установлена связь размера групп ES с другими показателями кучности винтовки (круговым вероятным отклонением (КВО), средним радиусом MR и непосредственно параметром распределения  $\sigma$ ). Приведен пример расчета кучности винтовки и вероятности попадания в цель по реальным размерам групп, сделанным винтовкой Accuracy AX в калибре .308 Winchester.

Статья будет полезна исследователям спортивного стрелкового оружия, спортсменам-стрелкам и всем любителям высокоточной стрельбы из нарезного оружия.

Работа выполнена в интересах мирового спортивного стрелкового сообщества по инициативе авторов и на их собственные средства, с использованием открытых источников информации.

### Abstract

The article addresses the following practical questions: how many groups and how many shots per group are sufficient to assess sport rifle precision; what the mean group size and the size of the next group can be expected to be; and how group size is related to competition-rifle precision and the probability of hitting a target.

An exact probabilistic model is developed for the extreme spread (ES) of a shot group, which remains the most widely used measure of sporting rifle precision. The ES distribution is obtained by direct statistical simulation of the underlying bivariate normal distribution of impact points. Using the PCG64DXSM pseudorandom number generator, ES distributions are calculated for 3-, 5-, 10-, and 100-shot groups. Central 80 % confidence intervals for the population mean ES and prediction intervals for the ES of the next independent group are also determined for initial samples comprising from 1 to 10 groups. It is shown that the generalized extreme value (GEV) distribution and the two-parameter gamma distribution can be used as engineering approximations of the group-size distribution.

The relationship between ES and other rifle precision metrics—circular error probable (CEP), mean radius (MR), and the dispersion parameter  $\sigma$ —is established. An example is presented in which rifle precision and the probability of hitting a target are calculated from actual shot-group sizes obtained with an Accuracy AX rifle chambered in .308 Winchester.

The paper will be useful to researchers studying competition firearms, competitive shooters, and all enthusiasts of precision shooting with rifled firearms.

This work was carried out in the interests of the international sport-shooting community, on the authors' own initiative and at their own expense, using publicly available sources of information.

**Ключевые слова:** кучность спортивной винтовки, экстремальный размер группы, extreme spread, двумерное нормальное распределение, доверительный интервал, прогнозный интервал, статистическое моделирование, GEV, гамма-распределение.

**Keywords:** sporting-rifle precision, extreme spread, shot group, bivariate normal distribution, confidence interval, prediction interval, Monte Carlo simulation, GEV distribution, Gamma distribution.

## Введение

Для оценки кучности спортивного стрелкового оружия стрелки чаще всего используют показатель, называемый экстремальным размером группы, или просто размером группы. В международной практике наиболее распространено обозначение ES (Extreme Spread); иногда применяется обозначение CTC (center-to-center), подчеркивающее, что измеряется расстояние между центрами двух наиболее удаленных пробоин.

Для расчета размера групп существует множество программ, которые позволяют обрабатывать мишени. Пакет shotGroups, например, рассчитывает максимальное попарное расстояние как extreme spread, средний радиус, CEP и другие характеристики, а также поддерживает статистический вывод по интервальным показателям кучности [22].

Простота *ES* одновременно является его главным достоинством и главным ограничением.

Он считается самым простым, но и самым слабым из статистических характеристик кучности, поскольку зависит только от двух наиболее удаленных попаданий, не использует информацию остальных выстрелов, чувствителен к случайным отрывам, закономерно возрастает с числом выстрелов в группе и, следовательно, не даёт точного представления о реальной кучности винтовки [1–4, 21, 22]. Поэтому для корректного сравнения целесообразно записывать его как  $ES_n$ , где  $n$  – число выстрелов в группе.

Практика стрелкового спорта, отработанная годами и десятилетиями, заключается в применении для оценки кучности винтовки одной или нескольких групп из 3 или 5, реже из 10 выстрелов. Две группы по 5 выстрелов стрелками считаются достаточными для оценки кучности в большинстве случаев [3]. Однако для такой практики можно выделить две проблемы, на которые указывает теория. Первая заключается в том, что размер групп  $ES_n$  при одной и той же кучности винтовки растет с ростом числа выстрелов в группе, поскольку основан только на экстремальных значениях и рассчитывается относительно собственного размера этой же малой группы, а не относительно истинного центра попаданий, вокруг которого и строится оценка кучности винтовки. В результате чего при малом числе выстрелов мы получаем завышенные оценки кучности винтовки и несопоставимые между собой группы с разным числом выстрелов. Средние размеры групп из 2, 3, 5, 10 и 100 выстрелов относятся к среднему размеру группы из 3 выстрелов приблизительно как 0,736; 1,000; 1,273; 1,583 и 2,361 [3].

Следовательно, средний размер 0,30 MOA для группы из трех выстрелов при одной и той же кучности винтовки соответствует примерно 0,38 MOA для пяти и 0,47 MOA для десяти выстрелов. Эти различия являются следствием свойства экстремальной статистики изменяться при увеличении  $n$  [1, 3]. Но из-за этого стрелкам не очень понятно, размер какой группы считать кучностью винтовки и как сравнивать размер разных групп между собой.

От числа выстрелов в группе зависит не только средний размер, но и его относительный разброс. Коэффициент вариации (отношение стандартного отклонения к среднему значению) для групп с числом выстрелов 2, 3, 5, 10, 30, 100 равен 0,52, 0,37, 0,27, 0,19, 0,13, 0,10 [3], что определяет большой разброс групп вокруг среднего значения и большой доверительный интервал нахождения среднего значения размера групп с меньшим числом выстрелов, или ожидаемого значения очередной группы. Стандартное отклонение  $\sigma$  для группы из 3 выстрелов составляет 37 % от среднего значения. Это очень много. Поэтому одна малая группа дает очень неопределенную оценку. Размер следующей отдельной группы неопределен еще сильнее.

Неопределенность размера среднего значения или размера очередной группы выявляет вторую проблему. Множество споров в социальных сетях и на соревнованиях идут именно вокруг вопросов, сколько нужно групп и сколько выстрелов в группе для оценки кучности винтовки. По малому числу выстрелов средняя кучность определяется очень неточно. Если, например, по 3 выстрелам получен размер одной группы  $ES_3 = 0,3$  MOA, мы не можем сказать, что все остальные группы будут тоже 0,3 MOA, и средняя кучность будет тоже 0,3 MOA. Размер следующих групп будет разбросан вокруг некоторого среднего значения в значительном диапазоне. Доверительный интервал среднего, оцененного по этой одной группе, например, с вероятностью 95 %, очень широкий и может составлять 0,17–0,82 MOA.

То есть одна группа размером 0.3 MOA из трех выстрелов не доказывает надежно ни то, что «кучность винтовки по этой группе равна 0,3 MOA», ни то, что винтовка «в среднем стреляет 0.3 MOA». Она говорит, что если мы получили одну группу в 0,3 MOA, то средний размер группы может лежать примерно в диапазоне 0.17–0.82 MOA. Неопределенным является не только средний размер группы, но и размер следующей группы, если мы отстреляли одну или несколько групп, уже получили их средний размер и хотим понять, какие группы ожидать дальше.

Свойства экстремального размера групп уже рассматривались ранее в наших статьях [2–4], но в них мы делали инженерные оценки на сравнительно небольшой статистике.

С увеличением быстродействия компьютеров появилась возможность получения точных значений зависимости размера групп и стандартного отклонения от числа выстрелов в группе и расчета точных доверительных интервалов, которые дают исчерпывающие ответы на поставленные выше практические вопросы.

**Цель данной статьи** - получить точное распределения  $ES_n$  непосредственно из модели координат попаданий, построить согласованные доверительные и прогнозные интервалы, определить область применения параметрических аппроксимаций и подкрепить предложенный методический подход экспериментом.

## Материалы и методы

Для достаточно полного экспериментального исследования распределения  $ES_n$  потребовалось бы практически недостижимое число выстрелов. Поэтому исследования проведены методом компьютерного моделирования двумерной нормальной модели распределения точек попадания на мишени [2, 3]. Прямое моделирование дополнено моделированием стандартных положительных асимметричных распределений GEV и Gamma

для компактной аналитической записи, генерации случайных размеров групп и быстрых приближенных расчетов, а также подкреплено численными примерами и натурным экспериментом с винтовкой Accurasy AX в калибре .308 Winchester.

Круговое двумерное нормальное распределение не рассматривается как доказанный универсальный физический закон рассеивания попаданий высокоточной винтовки. Это рабочая статистическая модель, подтверждаемая рядом испытаний прецизионных стволов в центральной области распределения. В реальном комплексе «винтовка—патрон» рассеивание может быть эллиптическим, ограниченным и условно зависимым от состояния ствола, патрона и процесса выстрела. При изменении состояния длинная серия может описываться смесью нескольких распределений. Поэтому применимость модели к конкретному комплексу должна проверяться по большим массивам координат попаданий, полученным в контролируемых условиях, что весьма затруднительно. Преимущества кругового двумерного нормального распределения состоят в том, что это самая изученная и самая удобная модель для качественного анализа распределения точек попадания на мишени в таких ситуациях.

Для построения распределений использовался NumPy Generator (PCG64DXSM) с начальным состоянием  $\text{seed} = 20260801$ . Стандартные нормальные координаты попаданий создавались методом `standard_normal` в формате `float64` [16, 17]. Для каждого выстрела генерировались независимые координаты  $X_i \sim N(0, 1)$ ,  $Y_i \sim N(0, 1)$ .

Для изучения распределения сгенерировано по 500 000 независимых групп при  $n=3, 5$  и  $10$ ; каждый массив разбит на 150 интервалов, по которым построены линии плотности. Для иллюстрации формы распределения размера групп этого оказалось достаточно, но для окончательных квантилей и границ доверительных интервалов использовались существенно более крупные расчёты — до миллионов и десятков миллионов групп. Доверительные и прогнозные таблицы рассчитывались для  $n=3, 5, 10$  и  $100$ , проведено 2 000 000 независимых экспериментов. Каждый эксперимент включал 10 исходных групп и одну независимую новую группу. Расчет был разделен на две половины по 1 000 000 экспериментов с начальными состояниями 20260801 и 20260802. Максимальное различие коэффициентов между двумя независимыми половинами моделирования составило 0,0013 для доверительных и 0,0037 для прогнозных интервалов. При  $n=100$  в каждой группе проверялись все 4950 попарных расстояний. В сумме для каждого значения  $n$  было смоделировано 22 000 000 групп. Для каждой комбинации  $n$  и  $m$  массивы безразмерных величин сортировались, после чего 10 %-й и 90 %-й квантили определялись как эмпирические квантили с линейной интерполяцией между соседними порядковыми статистиками.

Выбор доверительной вероятности  $P = 80 \%$  в данной работе, конечно, не следует считать универсальным стандартом, он обусловлен практическим характером и особенностями задачи. Для расчета доверительных и прогнозных интервалов во многих научных работах в подтверждающих, сертификационных и ответственных исследованиях стандартными являются уровни 90 %, 95 % или 99 %. Однако при настройке винтовки число реально выполнимых групп ограничено даже в контролируемых условиях. Для центрального 95 %-го интервала в каждом хвосте распределения остаётся только по 2,5 % результатов. Чтобы получить хотя бы по 10 наблюдений в каждом хвосте, потребовалось бы повторить

эксперимент примерно 400 раз. С учётом того, что каждый эксперимент включает несколько групп, практическая проверка интервалов более высокого уровня потребовала бы нереально большого числа выстрелов. Даже для 80 %-го интервала, ограниченного 10-м и 90-м процентилями, аналогичное число наблюдений достигается примерно за 100 повторений. В то же время дальнейшее снижение доверительной вероятности оставляло бы за пределами интервала более 20 % результатов и заметно уменьшало содержательность статистической оценки. Поэтому уровень  $P=0,80$  принят как разумный компромисс между надёжностью вывода, шириной интервала и возможностью его практической интерпретации. В расчётах ему соответствуют 10 %-й и 90 %-й квантили распределения.

Такой уровень не является чем-то исключительным, например, доверительная вероятность 0,80 используется в ряде расчётно-экспериментальных методов оценки надёжности при ограниченном объёме испытаний, поэтому её применение в инженерной задаче оценки кучности допустимо при явном указании принятого уровня. Кроме того, широкий доверительный интервал из-за его высокой неопределённости вряд ли был бы принят стрелками, которые привыкли представлять размер групп вообще одной цифрой.

### Результаты и обсуждение

Распределение экстремального размера групп получено непосредственно из двумерного нормального распределения. Пусть координаты  $n$  попаданий  $X_i = (X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , независимы и имеют круговое нормальное распределение:  $X_i, Y_i \sim N(0, \sigma_0^2)$ . Экстремальный размер группы:  $D_n = \max_{1 \leq i < j \leq n} \|X_i - X_j\|$ . Его точная функция распределения имеет вид:

$$F_{D_n}(d) = P \left( \max_{i < j} \|X_i - X_j\| \leq d \right).$$

В интегральной форме:

$$F_{D_n}(d) = \int_{(\mathbb{R}^2)^n} I \left[ \max_{i < j} \|x_i - x_j\| \leq d \right] \prod_{i=1}^n \varphi_{\sigma_0}(x_i) dx_1 \dots dx_n.$$

Это строгое определение выборочного распределения диаметра облака случайных точек попадания на мишени. Максимальное попарное расстояние является  $\max$ - $U$ -статистикой: попарные расстояния имеют общие точки и потому статистически зависимы [7, 10]. По этой причине стандартную теорию максимумов независимых величин нельзя переносить на размер групп без дополнительных обоснований.

Главное преимущество нормальной исходной модели в наших исследованиях — её масштабная инвариантность. При изменении масштаба рассеивания  $ES_n = \sigma_0 W_n$ , где распределение безразмерной величины  $W_n$  зависит только от числа выстрелов  $n$ . Поэтому достаточно один раз получить распределение при  $\sigma_0 = 1$ , а затем масштабировать результаты для любой фактической кучности.

При  $n > 2$  простого замкнутого выражения для плотности распределения размера группы в общем случае нет, поэтому в наших баллистических исследованиях для него применены метод Монте-Карло и приближенные распределения [3, 5, 6]. Двумерное нормальное распределение задавало координаты попаданий, а распределение экстремального размера группы получено из него как распределение производной величины:

$$X_i, Y_i \sim N(0, 1),$$

$$ES_n = \max_{i < j} \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}.$$

На рис. 1 приведены графики для групп из  $n = 3, \sim 5, \sim 10$  выстрелов, полученные прямым моделированием. Количество попарных расстояний точек попадания определялось соотношением:

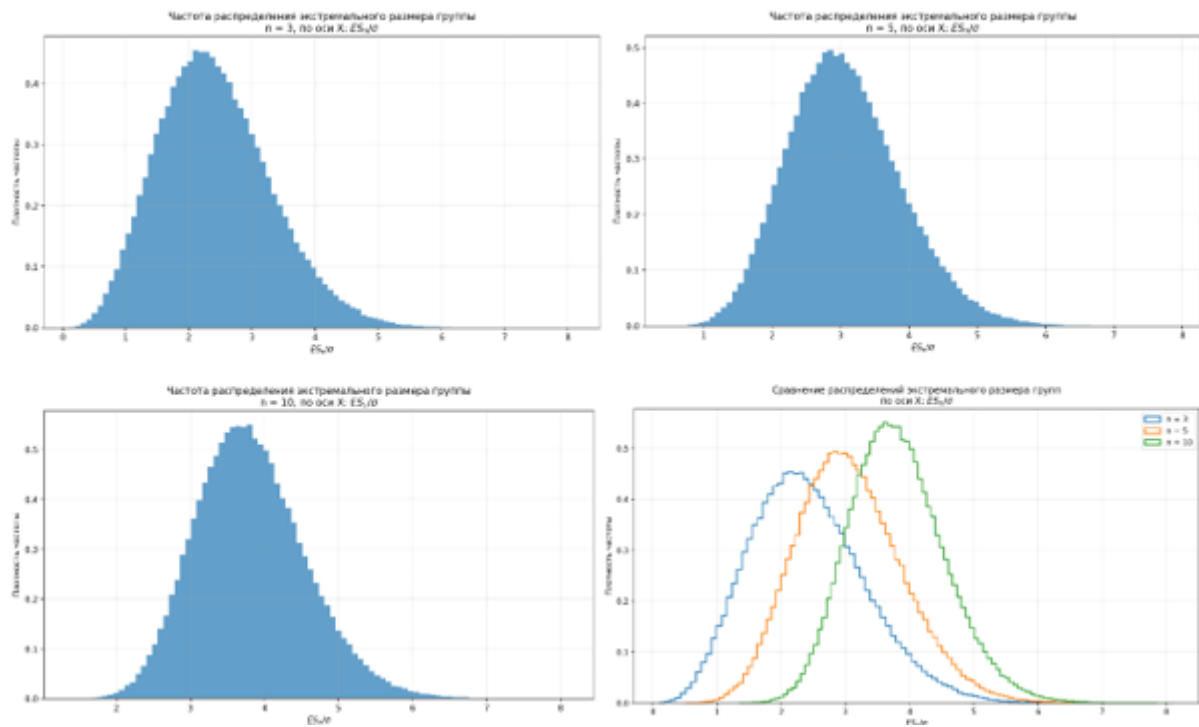
$$p = \frac{n(n-1)}{2}$$

В каждой группе рассчитывались все попарные расстояния:

$$d_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2},$$

а экстремальный размер определялся как  $ES_n = \max_{i < j} d_{ij}$ . Таким образом, экстремальный размер вычислялся точно по всем парам попаданий, без приближения аппроксимацией.

Для рис. 1 сгенерировано по 500 000 независимых групп при  $n=3, 5$  и  $10$ ; каждый массив разбит на 150 интервалов, по которым построены линии плотности. В моделировании использовалось  $\sigma = 1$ , поэтому численно  $ES_n/\sigma = ES_n$ . По горизонтали на графиках рис. 1 отложен нормированный размер  $ES_n/\sigma$ , по вертикали – оценка плотности вероятности.



**Рисунок 1. Плотности (частоты) вероятности распределения экстремальных размеров групп по 3, 5, 10 выстрелов в группе**

Графики показывают, что все исследованные группы имеют большое рассеивание относительно среднего значения, само среднее значение растет с ростом числа выстрелов в группе (рис. 1г), а отношение среднего квадратического отклонения к среднему значению уменьшается с ростом числа выстрелов в группе. Абсолютное стандартное отклонение уменьшается сравнительно медленно, поэтому распределение малых групп остается широким и правосторонне асимметричным. Полученные контрольные значения были:  $E[ES_3]/\sigma \approx 2,4086$ ,  $SD(ES_3)/\sigma \approx 0,8901$ ;  $E[ES_5]/\sigma \approx 3,0636$ ,  $SD(ES_5)/\sigma \approx 0,8258$ ;  $E[ES_{10}]/\sigma \approx 3,8119$ ,  $SD(ES_{10})/\sigma \approx 0,7424$ .

Такое значительное рассеивание размеров групп относительно среднего при малом числе групп вызывает необходимость представления истинного среднего размера, а также размера очередной новой группы в виде доверительных интервалов, рассчитанных с заданной доверительной вероятностью по уже полученной статистике.

### Доверительный интервал истинного среднего размера

Пусть мы имеем  $m$  групп по  $n$  выстрелов в каждой. Обозначим измеренный выборочный средний размер по  $m$  группам из  $n$  выстрелов как:

$$\bar{ES}_{n,m} = \frac{ES_{n,1} + \dots + ES_{n,m}}{m}$$

а неизвестный истинный средний размер таких групп как:

$$\mu_n = E[ES_n]$$

Введем безразмерную величину  $Z_{n,m}$ :



$$Z_{n,m} = \frac{\bar{E}S_{n,m}}{\mu_n}.$$

Определим доверительный интервал с доверительной вероятностью  $P = 0,80$ . Если  $q_{0,10}$  и  $q_{0,90}$  — её 10%-й и 90%-й квантили, то:

$$P \left( q_{0,10} \leq \frac{\bar{E}S_{n,m}}{\mu_n} \leq q_{0,90} \right) = 0,80.$$

После обращения неравенства получается доверительный интервал:

$$\mu_n \in \left[ \frac{\bar{E}S_{n,m}}{q_{0,90}}; \frac{\bar{E}S_{n,m}}{q_{0,10}} \right]$$

Или  $\mu_n \in [K_L; \bar{E}S_{n,m} K_U \bar{E}S_{n,m}]$ ,  $P = 0,80$ , где:

$$K_L = \frac{1}{q_{0,90}}, \quad K_U = \frac{1}{q_{0,10}}.$$

Квантили рассчитаны непосредственно по смоделированному распределению.

**Таблица 1.**

**80%-й интервал среднего значения экстремального размера группы**

| m \ n | 3           | 5           | 10          | 100         |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1     | 0,669–1,842 | 0,737–1,500 | 0,796–1,315 | 0,887–1,132 |
| 2     | 0,743–1,486 | 0,800–1,314 | 0,848–1,207 | 0,918–1,092 |
| 3     | 0,781–1,366 | 0,831–1,244 | 0,872–1,164 | 0,932–1,074 |
| 4     | 0,805–1,303 | 0,851–1,205 | 0,888–1,139 | 0,941–1,064 |
| 5     | 0,822–1,264 | 0,865–1,180 | 0,899–1,123 | 0,947–1,057 |
| 6     | 0,836–1,236 | 0,875–1,162 | 0,907–1,111 | 0,951–1,052 |
| 7     | 0,846–1,215 | 0,883–1,148 | 0,913–1,102 | 0,955–1,048 |
| 8     | 0,855–1,198 | 0,890–1,137 | 0,918–1,095 | 0,958–1,045 |
| 9     | 0,862–1,185 | 0,896–1,129 | 0,923–1,089 | 0,960–1,042 |
| 10    | 0,868–1,174 | 0,901–1,121 | 0,926–1,084 | 0,962–1,040 |

Такой интервал является обратным доверительным интервалом истинного среднего размера: наблюдаемой величиной служит  $\bar{E}S_{n,m}$ , а оцениваемым постоянным параметром —  $\mu_n$ . В частотной интерпретации истинное  $\mu$  не является случайной величиной. Случайными являются границы, получаемые при повторении эксперимента; 80% интервалов, построенных по этой процедуре, накрывают истинное среднее.

**Пример применения таблицы 1.** Отстреляно 3 группы по 5 выстрелов. Средний размер по 3 группам составил  $\bar{E}S_{3,5} = 0,5$  МОА. В левом столбце находим цифру 3, в верхней строчке находим цифру 5. На пересечении столбца и строки находим

доверительный интервал 0,831–1,244 для доверительной вероятности 0,8. Умножаем на 0,5 МОА и получаем доверительный интервал нахождения среднего значения размера групп  $ES_n = 0,5 \cdot (0,831 - 1,244) = (0,416 - 0,622)$  МОА.

### Прогнозный интервал размера следующей группы

Доверительный интервал среднего не отвечает на вопрос, какого размера окажется следующая отдельная группа, после того как уже получено  $m$  групп. Для этого вводится независимая новая группа  $ES_{n,\text{new}}$ . Оценим теперь интервал ее размера. Расчёт также выполнен прямым моделированием кругового двумерного нормального распределения попаданий:

$$X_i, Y_i \sim N(0, 1),$$

$$ES_n = \max_{i < j} \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}.$$

Для каждого сочетания  $n$  и  $m$  моделировалось отношение:

$$R_{n,m} = \frac{ES_{n,\text{new}}}{\bar{ES}_{n,m}},$$

$$\bar{ES}_{n,m} = \frac{ES_{n,1} + \dots + ES_{n,m}}{m}$$

где  $\bar{ES}_{n,m}$  — выборочный средний размер ранее измеренных  $m$  групп, а  $ES_{n,\text{new}}$  — размер следующей независимой группы. Центральный 80%-й прогнозный интервал определяется 10%-м и 90%-м квантилями этого отношения:

$$P\left(Q_L \leq \frac{ES_{n,\text{new}}}{\bar{ES}_{n,m}} \leq Q_U\right) = 0,80.$$

Следовательно:  $ES_{n,\text{new}} \in [Q_L; \bar{ES}_{n,m} Q_U \bar{ES}_{n,m}]$ . В строках табл. 2 указано число ранее измеренных групп  $m$ , в столбцах — число выстрелов в каждой группе  $n$ . Каждая ячейка содержит коэффициенты  $Q_L - Q_U$ , на которые нужно умножить выборочный средний размер ранее отстрелянных групп:

$$ES_{n,\text{new}} \in [Q_L; \bar{ES}_{n,m} Q_U \bar{ES}_{n,m}], \quad P = 0,80$$

Здесь, в отличие от коэффициентов  $K_L$  и  $K_U$ , квантили не обращаются: прогнозируемая величина находится в числителе отношения.

Таблица 2.

**80%-ный прогнозный интервал размера одной следующей независимой группы**

| $m \setminus n$ | 3           | 5           | 10          | 100         |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1               | 0,488-2,053 | 0,605-1,654 | 0,702-1,426 | 0,841-1,188 |
| 2               | 0,512-1,751 | 0,632-1,504 | 0,728-1,344 | 0,860-1,160 |
| 3               | 0,522-1,661 | 0,643-1,455 | 0,738-1,315 | 0,867-1,150 |
| 4               | 0,527-1,617 | 0,648-1,430 | 0,743-1,300 | 0,871-1,144 |
| 5               | 0,530-1,592 | 0,652-1,415 | 0,746-1,292 | 0,873-1,141 |
| 6               | 0,532-1,576 | 0,654-1,405 | 0,748-1,286 | 0,875-1,139 |
| 7               | 0,533-1,564 | 0,656-1,398 | 0,750-1,281 | 0,876-1,137 |
| 8               | 0,535-1,555 | 0,657-1,393 | 0,751-1,278 | 0,877-1,136 |
| 9               | 0,536-1,548 | 0,658-1,389 | 0,752-1,276 | 0,878-1,135 |
| 10              | 0,536-1,543 | 0,659-1,385 | 0,753-1,274 | 0,878-1,134 |

Прогнозный интервал заметно шире доверительного интервала среднего, поскольку включает две составляющие неопределенности: ошибку оценки  $\mu$  и собственный случайный разброс новой группы. С ростом  $m$  первая составляющая уменьшается, но вторая сохраняется. Поэтому прогнозный интервал не сужается до точки даже при практически точном знании истинного среднего. То есть, с ростом числа групп  $m$  коэффициенты доверительного интервала  $K_L$  и  $K_U$  стремятся к единице, а прогнозные коэффициенты  $Q_L$  и  $Q_U$  к единице не сходятся, поскольку естественный разброс отдельной будущей группы сохраняется и при точно известном среднем.

**Пример применения таблицы 2.** Пусть отстреляны пять групп по пять выстрелов:  $n = 5$ ,  $m = 5$ , а их выборочный средний экстремальный размер равен:  $\bar{E}S_{5,5} = 0,500 \sim \text{МОА}$ . В строке  $m = 5$ , столбце  $n = 5$  указано:  $0,652 - 1,415$ , то есть  $Q_L = 0,652$ ,  $Q_U = 1,415$ . Следовательно:

$$ES_{5,new} \in 0,500 \cdot (0,652 - 1,415), S_{5,new} = (0,326 - 0,708) \sim \text{МОА}, P = 0,80$$

**Параметрические аппроксимации распределения  $\bar{E}S_{n,m}$** 

Прямое моделирование исходных координат дает опорное выборочное распределение в рамках принятой двумерной нормальной модели. Однако для компактной аналитической записи, генерации случайных размеров групп и быстрых приближенных расчетов удобно использовать стандартные положительные асимметричные распределения. Наиболее естественными кандидатами являются GEV [6] и Gamma.

**Обобщенное распределение экстремальных значений GEV**

Рассмотрим варианты распределения GEV, который также представлен в нашей работе [2], и гамма-распределение. Из двух предложенных вариантов распределение GEV имеет более сильное теоретическое обоснование как модель экстремальной величины, чем гамма-распределение. Однако точным законом распределения экстремального размера группы при

конечном числе выстрелов не является ни GEV, ни гамма-распределение. GEV действительно предназначено для описания экстремальных величин. В стандартной системе знаков функция плотности GEV может быть записана как

$$f_{GEV}(x) = \frac{1}{s} \left[ 1 + c \frac{x - \mu}{s} \right]^{-1/c-1} \exp \left\{ - \left[ 1 + c \frac{x - \mu}{s} \right]^{-1/c} \right\},$$

при условии:

$$1 + c \frac{x - \mu}{s} > 0.$$

где  $\mu$  — параметр положения,  $s > 0$  — параметр масштаба,  $\xi$  — параметр формы [11]. При  $\xi \rightarrow 0$  получаем распределение Гумбеля. Следует учитывать, что в `scipy.stats.genextreme` принят противоположный знак параметра формы по сравнению со многими статистическими источниками [15]. Здесь заменено обозначение масштаба  $\sigma$  на  $s$ , чтобы не путать его с координатным стандартным отклонением попаданий  $\sigma_0$ . Условие

$$x \geq \mu - \frac{s}{c}$$

верно только при  $c > 0$ . В общем случае:

$$c > 0 : x > \mu - \frac{s}{c};$$

$$c < 0 : x < \mu - \frac{s}{c};$$

$$c = 0 : -\infty < x < \infty.$$

При  $c \rightarrow 0$  GEV переходит в распределение Гумбеля:

$$f(x) = \frac{1}{s} \exp \left[ - \frac{x - \mu}{s} - \exp \left( - \frac{x - \mu}{s} \right) \right].$$

GEV теоретически связано с экстремальными величинами. Для максимального попарного расстояния в сферически-симметричных нормальных и близких к ним распределениях после зависящих от  $n$  центрирования и масштабирования доказаны предельные законы типа Гумбеля [8–10]. Однако эти результаты относятся к асимптотике  $n \rightarrow \infty$  и никак не означают, что выборочный  $\bar{E}S_{n,m}$  при малых значениях  $n = 3, 5$  или  $10$  точно имеет трехпараметрическое GEV-распределение. Это видно и по хвостам. Для любой пары нормальных точек:

$$P (\| X_i - X_j \| > d) = \exp \left( - \frac{d^2}{4\sigma_0^2} \right).$$

Поскольку  $D_n$  — максимум из

$$p = \frac{n(n-1)}{2}$$

попарных расстояний, получаем:

$$\exp\left(-\frac{d^2}{4\sigma_0^2}\right) \leq P(D_n > d) \leq \frac{n(n-1)}{2} \exp\left(-\frac{d^2}{4\sigma_0^2}\right).$$

Следовательно, при фиксированном  $n$  правый хвост имеет гауссовский тип. При  $\xi > 0$  GEV задает более тяжелый степенной хвост, при  $\xi = 0$  — экспоненциальный, а при  $\xi < 0$  — конечную верхнюю границу. Ни один из этих вариантов не совпадает в точности с выборочным законом  $\bar{E}S_{n,m}$ . Поэтому GEV следует рассматривать как гибкую эмпирическую аппроксимацию, а не как точный закон. В более ранних работах авторов GEV использовалось именно как модель, подобранная по результатам численного эксперимента [2, 3]; настоящий анализ уточняет границы такой интерпретации.

### Двухпараметрическая Гамма-модель

При круговом двумерном нормальном распределении координат попаданий квадрат расстояния между любой фиксированной парой пробойн имеет гамма-распределение с параметром формы 1 и масштабом  $4s^2$ , то есть является экспоненциально распределённой величиной. Но экстремальный размер группы  $D_n$  представляет собой квадратный корень из максимума зависимых квадратов попарных расстояний и поэтому в общем случае точному Гамма-распределению не подчиняется.

Удобная двухпараметрическая аппроксимация плотности имеет вид:

$$f_{D_n}(d) \approx \frac{d^{k_n-1} \exp(-d/\theta_n)}{\Gamma(k_n) \theta_n^{k_n}}, \quad d > 0$$

Для нормированного размера, если известны:

$$\mu_n = E[ES_n], \quad c_n = \frac{SD(ES_n)}{E[ES_n]},$$

то параметры распределения, согласованные по первым двум моментам, равны:

$$k = \frac{1}{c_n^2}, \quad \theta = \mu_n c_n^2.$$

Тогда автоматически:  $E[ES_n] = \mu_n$ ,  $SD(ES_n) = c_n \mu_n$ .

Двухпараметрическая Гамма удобна для практического применения. Преимущества этой модели: строго положительная область значений, определено только при  $x > 0$ ; естественная правосторонняя асимметрия, хорошо описывает положительные случайные величины с правым хвостом; удобно параметризуется через среднее и коэффициент вариации; точно воспроизводятся заданные среднее и дисперсия,  $E[D] = \alpha\theta$ ;  $SD(D) = \sqrt{\alpha}\theta$ ;

простая генерация случайных чисел; простое распределение суммы и среднего нескольких Gamma-величин при одинаковом масштабе; квантили легко вычисляются численно [12]. Но её недостаток состоит в том, что это моментная аппроксимация без вывода из геометрии группы попаданий. Совпадение первых двух моментов ещё не гарантирует точного совпадения формы и хвостов. Gamma имеет хвост порядка  $P(D_n > d) \sim d^{k-1} e^{-d/\theta}$  и поэтому может завышать вероятность чрезвычайно больших групп по сравнению с истинным гауссовским хвостом

$$\exp\left(-\frac{d^2}{4\sigma_0^2}\right).$$

Для инженерной параметризации результатов моделирования была получена эмпирическая зависимость:

$$\begin{aligned} L &= \ln n, \\ a_n &= 2\sqrt{2L} - \frac{1,03463}{\sqrt{L}} + \frac{0,46403}{L}, \\ c_n &= \frac{0,320637}{L + 0,63234} + \frac{0,42595}{(L + 0,63234)^{\frac{3}{2}}}, \\ \mu_n &= \sigma a_n, k_n = c_n^{-2}, \theta_n = \sigma a_n c_n^2. \\ Z_n &= \frac{D_n}{\sigma} \end{aligned}$$

масштабный параметр становится безразмерным:  $\tilde{\theta}_n = a_n c_n^2$ . Для группы из  $n$  выстрелов примем, что экстремальный размер  $ES_n$  имеет гамма-распределение:

$$f(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(k)\theta^k}, \quad x > 0.$$

**Частный пример.** Для определённости возьмем группы по 3 выстрела, потому что именно они чаще всего обсуждались у нас раньше. Для  $n = 3$  мы уже использовали  $c_3 \approx 0,37$ . В качестве примера среднего размера примем  $\mu_3 = 0,50$ ~МОА. Тогда:

$$k = \frac{1}{0,37^2} \approx 7,3046, \theta = 0,50 \cdot 0,37^2 \approx 0,06845.$$

Итоговая модель:  $ES_3 \sim \Gamma(7,3046, \sim 0,06845)$ . В диапазоне  $2 \leq n \leq 200$  максимальные расхождения с опорным прямым моделированием на использованной сетке составили примерно: 0,51% для  $\mu_n$  и: 0,63% для  $c_n$ . Эти формулы являются эмпирической аппроксимацией, а не теоремой о точном распределении.

**Более строгий вариант:** Gamma для квадрата размера. С точки зрения хвоста более естественно аппроксимировать Gamma-распределением не  $D_n$ , а:  $Y_n = D_n^2$ . Для  $n = 2$  это даёт точный закон:  $D_2^2 \sim \text{Gamma}(1, 4s^2)$ . Для  $n > 2$  это всё равно будет аппроксимацией, но она лучше сохраняет происхождение распределения из суммы квадратов нормальных координат. Если:  $Y_n = D_n^2 \text{Gamma}(a_n, \vartheta_n)$ , то плотность самого размера получается преобразованием:

$$f_{D_n}(d) = \frac{2d^{2a_n-1}}{\Gamma(a_n) \vartheta_n^{a_n}} \exp\left(-\frac{d^2}{\vartheta_n}\right), \quad d > 0.$$

Это уже обобщённое гамма-распределение. Его правый хвост содержит  $\exp(-Cd^2)$ , что лучше соответствует нормальной природе исходных координат, чем хвост обычной Gamma:  $\exp(-Cd)$ . Однако такая обобщенная Gamma-модель сложнее, а обычная Gamma для  $D_n$  часто удобнее в центральной области распределения и даёт достаточно хорошую практическую аппроксимацию.

### Сравнение Gamma, GEV и прямого моделирования

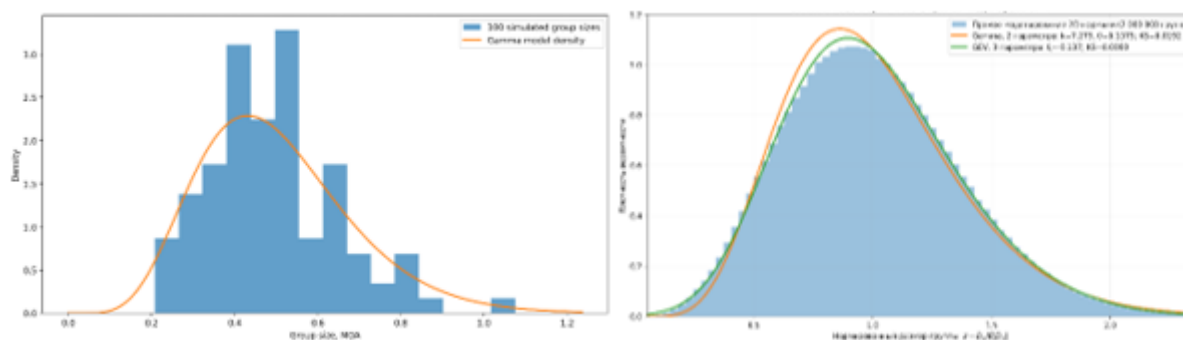
На рис. 2а показана выборка из 100 групп по 3 выстрела, непосредственно сгенерированных из двумерной нормальной модели и масштабированных к среднему размеру 0,50 МОА, вместе с моментной Gamma-аппроксимацией. На рис. 2б приведено сравнение прямого распределения нормированного размера с Gamma и GEV. Опорное распределение построено по 2 000 000 групп; параметры моделей оценивались по 300 000 группам, а критерий Колмогорова–Смирнова — на независимой проверочной части. На графике показано распределение нормированного экстремального размера группы из 3 выстрелов:

$$Z_3 = \frac{D_3}{E[D_3]}.$$

Для  $n = 3$  получено: Gamma  $k = 7,275$ ,  $\theta = 0,1375$  для нормированного размера  $Z_3$ . Расстояние Колмогорова–Смирнова:  $D_{KS} = 0,0192$ . GEV в стандартной системе знаков:  $\xi = -0,137$ ,  $\mu_{GEV} = 0,8466$ ,  $s_{GEV} = 0,3358$ . Расстояние Колмогорова–Смирнова:  $D_{KS} = 0,0060$ . На графике используется стандартное обозначение формы  $\xi$ . В функции `scipy.stats.genextreme` знак параметра формы противоположен принятому во многих формулах GEV, поэтому при обработке результатов знак был изменён.

Видно, что в области больших значений размеров групп оба распределения дают неплохую точность, но в области малых значений гамма-распределение больше занижает вероятность групп. Оба распределения в принципе подходят для практических задач, при этом Gamma проще и удобнее.

GEV заметно точнее воспроизвело центральную форму распределения. Однако отрицательное  $\xi$  создало конечную верхнюю границу, которой истинное нормальное облако не имеет. Gamma хуже описывает вершину и левую часть распределения, зато остается положительной и неограниченной сверху, имеет только два параметра и удобна для расчетов выборочных средних.



**Рисунок 2. а – гистограмма распределения 100 групп из 3 выстрелов каждая и ее аппроксимация гамма-распределением; б – сравнение точного распределения групп из 3 выстрелов с распределениями Gamma и GEV**

Следовательно, выбор модели зависит от цели. GEV полезно как гибкий интерполятор распределения одной группы; Gamma — как компактная инженерная аппроксимация. Для вывода о качестве модели желательно сравнивать не только критерий согласия, но и AIC/BIC, критерий Андерсона–Дарлинга, ошибки центральных и хвостовых квантилей и качество на независимой выборке [6]. Для окончательных доверительных и прогнозных таблиц предпочтительно прямое моделирование исходных координат.

### Оценка кучности винтовки по размеру групп

В профессиональной практике кучность спортивного стрелкового оружия с круговым распределением точек попадания оценивается круговым вероятным отклонением (КВО), или CEP (Circular Error Probable). Это радиус круга, внутри которого находится заданная доля попаданий. Например, для 50 % попаданий  $KBO_{50} = R_{50} = 1,177\sigma$ . Другим показателем является средний радиус попаданий MR, определяемый относительно известного центра распределения:  $MR = 1,253\sigma$  [2–4]. Поскольку CEP и MR определяются через стандартное отклонение  $\sigma$ , в системе классификации баллистической кучности винтовок [2–4, 5] в качестве основной характеристики рассеивания предложено использовать непосредственно параметр  $\sigma$ . Если распределение точек попадания является несимметричным, применяются показатели кучности стрелкового оружия, учитывающие это [3, 4].

Мы видели, что с ростом числа выстрелов в группе размер групп неограниченно растет. Если принять размер группы по 3 выстрела за 1, то аналогичный ему размер группы по 5 выстрелов будет больше в 1,27 раз, а по 10 выстрелов – в 1,58 раз. Сто выстрелов увеличивают размер группы в 2,36 раз. Для оценки кучности винтовки по размеру групп нужно решить два вопроса: 1) пересчитать размер групп в другие показатели кучности винтовки (CEP, MR или  $\sigma$ ), и 2) установить, с какой точностью мы сможем сделать такой пересчет.

Хорошая аппроксимация зависимости экстремального размера группы от числа выстрелов в группе для диапазона  $2 \leq n \leq 100$  имеет вид:  $[ES_n] \approx \sigma \left( -0.72 + 2.99\sqrt{\ln n} \right)$ . Если измерен средний экстремальный размер групп  $ES_n$  из  $n$  выстрелов, то грубая оценка дает величину  $\sigma$ :



$$\sigma \approx \frac{ES_n}{-0.72 + 2.99\sqrt{\ln n}}$$

Тогда в среднем  $\sigma = 0,415 ES_3$ ,  $\sigma = 0,326 ES_5$ ,  $\sigma = 0,262 ES_{10}$ ,  $\sigma = 0,209 ES_{30}$ ,  $\sigma = 0,176 ES_{100}$ . Если наоборот известна  $\sigma$ , ожидаемый экстремальный размер группы можно оценить так:  $ES_3 \approx 2.41\sigma$ ,  $ES_5 \approx 3.07\sigma$ ,  $ES_{10} \approx 3.81\sigma$ ,  $ES_{30} \approx 4.79\sigma$ ,  $ES_{100} \approx 5.69\sigma$ .

Эти соотношения позволяют формально пересчитать размер групп в показатели кучности винтовки. При большом числе выстрелов в группе вместо размера групп правомернее применять средний радиус групп. Во-первых, он более информативен, поскольку оценивает кучность не по двум крайним точкам попаданий, как размер групп, а по всем точкам. Во-вторых, средний радиус относится к тому же классу усредненных величин, как и показатели кучности винтовки, и с ростом числа выстрелов в группе асимптотически приближается к значению  $1,253\sigma$ , в то время как размер группы относится к другому классу экстремальных величин и непрерывно растет с ростом числа выстрелов в группе. Но поскольку в данной статье рассматриваются свойства именно размера групп, продолжим исследования с ним.

Например, мы имеем 2 группы по 5 выстрелов со средним размером  $ES_5 = 0,5$  MOA. Соответствующее этому числу выстрелов стандартное отклонение равно  $\sigma = 0,326 ES_5 = 0,163$  MOA,  $KBO = 1,177\sigma = 0,192$  MOA,  $MR = 1,253\sigma = 0,204$  MOA. Далее остается найти вероятный интервал изменения  $ES_5$  и пересчитать в интервал изменения  $\sigma$ . Заходим в таблицу 1, находим группу по пять, спускаемся по этому столбцу, находим число групп 2, на пересечении видим доверительный интервал  $(0,800-1,314) ES_5$ . Умножаем границы интервала на 0,5 и на 0,326 и получаем границы для  $\sigma$ :  $\sigma = (0,130-0,214)$  MOA с доверительной вероятностью 80%. Соответственно  $KBO = (0,153-0,252)$  MOA,  $MR = (0,163-0,268)$  MOA. Если увеличивать доверительную вероятность до 95%, интервал будет намного шире. Например, если размер группы из 3 выстрелов со средним значением 0,3 MOA и доверительным интервалом  $(0,17-0,82)$  MOA пересчитывается в кучность винтовки, представленную показателем  $\bar{B}$ , то нужно будет записать: среднее значение  $\bar{B} = 0,124$  MOA, интервал  $\bar{B} = (0,07-0,34)$  MOA. Можно вместо интервала принять верхнюю гарантированную оценку, например,  $\bar{B} \leq 0,34$  MOA.

Что в итоге дает пересчет размера групп в показатели кучности винтовки  $\bar{B}$ ,  $R_{50}$ ,  $MR$ ? Во-первых, мы будем знать реальный интервал или верхнее гарантированное значение кучности винтовки как некоторую постоянную величину, не связанную с числом выстрелов в группе, а не как изменяющийся от числа выстрелов размер группы. Но главное, этот пересчет позволяет оценить вероятность попадания в цель, например, в круг радиусом  $r$  с первого выстрела, или вероятность попадания хотя бы одним выстрелом из группы заданного размера, или процент попаданий при стрельбе сериями. А это главная задача для винтовки, если только она не предназначена для бенчеста.

### Связь показателей кучности винтовки с вероятностью попадания в цель

Вероятность попадания в цель определяется двумя величинами: отклонением СТП от точки прицеливания или центра цели  $\Delta$ , и рассеиванием точек попадания вокруг СТП. Если цель круглая, радиус цели равен  $r = D/2$ , где  $D$  — диаметр цели. Если рассеивание круговое, то  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ , а смещение центра попаданий от точки прицеливания равно  $\Delta$ , то вероятность попадания в круг радиуса  $r$  определяется по табл. 3, которая построена по следующим формулам. Пусть координаты попадания  $X$  и  $Y$ , отсчитываемые от точки прицеливания, имеют совместное нормальное распределение. При этом  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ,  $cov(X, Y) = 0$ , а смещение средней точки попадания (СТП) относительно точки прицеливания равно

$$\Delta = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}.$$

В этом случае рассеивание является круговым, а радиальное расстояние

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

от точки прицеливания до попадания имеет распределение Райса. Вероятность попадания одного выстрела в круг радиусом  $r$ , центр которого совпадает с точкой прицеливания, определяется выражением [15–17]:

$$P_1(a; \Delta; \sigma) = P(D \leq a) = \int_0^a \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + \Delta^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r\Delta}{\sigma^2}\right) dr.$$

**Таблица 3.**

Вероятность попадания в цель в зависимости от  $r/\sigma$  и  $\Delta/\sigma$ 

| $\Delta/\sigma$ | 0     | 0.2   | 0.4   | 0.6   | 0.8   | 1     | 1.25  | 1.5   | 1.75  | 2     | 2.25  | 2.5   | 2.75  | 3     | 3.5   | 4     |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0             | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0.1             | 0.005 | 0.005 | 0.005 | 0.004 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0.2             | 0.020 | 0.019 | 0.018 | 0.017 | 0.014 | 0.012 | 0.009 | 0.007 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0.3             | 0.044 | 0.042 | 0.041 | 0.037 | 0.032 | 0.027 | 0.020 | 0.015 | 0.010 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0.4             | 0.077 | 0.075 | 0.071 | 0.065 | 0.057 | 0.048 | 0.036 | 0.026 | 0.018 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 0.5             | 0.118 | 0.115 | 0.109 | 0.099 | 0.087 | 0.073 | 0.056 | 0.041 | 0.028 | 0.018 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 0.6             | 0.165 | 0.162 | 0.153 | 0.140 | 0.123 | 0.104 | 0.081 | 0.059 | 0.041 | 0.026 | 0.016 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 0.7             | 0.217 | 0.213 | 0.202 | 0.185 | 0.164 | 0.140 | 0.109 | 0.080 | 0.056 | 0.037 | 0.023 | 0.014 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 0.8             | 0.274 | 0.269 | 0.256 | 0.235 | 0.209 | 0.179 | 0.141 | 0.105 | 0.074 | 0.050 | 0.031 | 0.019 | 0.011 | 0.006 | 0.001 | 0.000 |
| 0.9             | 0.333 | 0.328 | 0.312 | 0.288 | 0.257 | 0.222 | 0.176 | 0.133 | 0.095 | 0.064 | 0.041 | 0.025 | 0.015 | 0.008 | 0.002 | 0.000 |
| 1.0             | 0.393 | 0.387 | 0.370 | 0.342 | 0.307 | 0.267 | 0.214 | 0.164 | 0.119 | 0.082 | 0.054 | 0.033 | 0.019 | 0.011 | 0.003 | 0.001 |
| 1.1             | 0.454 | 0.447 | 0.428 | 0.398 | 0.359 | 0.315 | 0.255 | 0.198 | 0.146 | 0.102 | 0.068 | 0.043 | 0.026 | 0.015 | 0.004 | 0.001 |
| 1.2             | 0.513 | 0.505 | 0.486 | 0.454 | 0.412 | 0.364 | 0.299 | 0.236 | 0.175 | 0.125 | 0.084 | 0.054 | 0.033 | 0.019 | 0.005 | 0.001 |
| 1.3             | 0.570 | 0.561 | 0.542 | 0.508 | 0.464 | 0.413 | 0.343 | 0.273 | 0.207 | 0.150 | 0.104 | 0.068 | 0.042 | 0.025 | 0.007 | 0.002 |
| 1.4             | 0.625 | 0.617 | 0.596 | 0.561 | 0.516 | 0.463 | 0.389 | 0.314 | 0.242 | 0.178 | 0.125 | 0.084 | 0.053 | 0.032 | 0.010 | 0.002 |
| 1.5             | 0.675 | 0.668 | 0.647 | 0.612 | 0.566 | 0.512 | 0.436 | 0.356 | 0.279 | 0.209 | 0.150 | 0.102 | 0.066 | 0.041 | 0.013 | 0.003 |
| 1.6             | 0.722 | 0.715 | 0.694 | 0.660 | 0.613 | 0.560 | 0.482 | 0.400 | 0.318 | 0.243 | 0.177 | 0.123 | 0.081 | 0.051 | 0.017 | 0.005 |
| 1.7             | 0.764 | 0.757 | 0.737 | 0.704 | 0.660 | 0.606 | 0.528 | 0.444 | 0.359 | 0.278 | 0.206 | 0.146 | 0.099 | 0.063 | 0.022 | 0.006 |
| 1.8             | 0.802 | 0.796 | 0.777 | 0.745 | 0.703 | 0.650 | 0.574 | 0.489 | 0.401 | 0.316 | 0.239 | 0.172 | 0.119 | 0.078 | 0.029 | 0.009 |
| 1.9             | 0.836 | 0.830 | 0.812 | 0.783 | 0.742 | 0.692 | 0.617 | 0.533 | 0.444 | 0.356 | 0.273 | 0.201 | 0.141 | 0.094 | 0.036 | 0.011 |
| 2.0             | 0.865 | 0.859 | 0.843 | 0.816 | 0.779 | 0.731 | 0.659 | 0.576 | 0.487 | 0.396 | 0.310 | 0.232 | 0.166 | 0.113 | 0.045 | 0.015 |
| 2.1             | 0.890 | 0.885 | 0.870 | 0.846 | 0.811 | 0.767 | 0.699 | 0.619 | 0.530 | 0.438 | 0.348 | 0.266 | 0.194 | 0.135 | 0.056 | 0.019 |
| 2.2             | 0.911 | 0.907 | 0.894 | 0.872 | 0.840 | 0.800 | 0.736 | 0.659 | 0.573 | 0.481 | 0.388 | 0.301 | 0.224 | 0.159 | 0.089 | 0.024 |
| 2.3             | 0.929 | 0.925 | 0.914 | 0.894 | 0.866 | 0.829 | 0.770 | 0.698 | 0.614 | 0.523 | 0.429 | 0.339 | 0.256 | 0.185 | 0.094 | 0.031 |
| 2.4             | 0.944 | 0.941 | 0.931 | 0.914 | 0.889 | 0.856 | 0.802 | 0.734 | 0.654 | 0.565 | 0.471 | 0.378 | 0.291 | 0.215 | 0.101 | 0.039 |
| 2.5             | 0.956 | 0.953 | 0.945 | 0.930 | 0.909 | 0.879 | 0.830 | 0.768 | 0.692 | 0.606 | 0.513 | 0.418 | 0.328 | 0.246 | 0.121 | 0.048 |
| 2.6             | 0.966 | 0.964 | 0.956 | 0.944 | 0.925 | 0.900 | 0.856 | 0.799 | 0.728 | 0.646 | 0.554 | 0.460 | 0.366 | 0.280 | 0.143 | 0.060 |
| 2.7             | 0.974 | 0.972 | 0.966 | 0.956 | 0.940 | 0.917 | 0.879 | 0.827 | 0.762 | 0.684 | 0.595 | 0.501 | 0.406 | 0.316 | 0.167 | 0.073 |
| 2.8             | 0.980 | 0.979 | 0.974 | 0.965 | 0.952 | 0.933 | 0.899 | 0.853 | 0.793 | 0.720 | 0.635 | 0.542 | 0.447 | 0.353 | 0.194 | 0.088 |
| 2.9             | 0.985 | 0.984 | 0.980 | 0.973 | 0.962 | 0.945 | 0.917 | 0.876 | 0.822 | 0.754 | 0.673 | 0.583 | 0.488 | 0.392 | 0.224 | 0.106 |
| 3.0             | 0.989 | 0.988 | 0.985 | 0.979 | 0.970 | 0.956 | 0.932 | 0.896 | 0.848 | 0.786 | 0.710 | 0.623 | 0.529 | 0.433 | 0.256 | 0.126 |
| 3.1             | 0.992 | 0.991 | 0.988 | 0.984 | 0.976 | 0.965 | 0.944 | 0.914 | 0.871 | 0.815 | 0.744 | 0.662 | 0.570 | 0.473 | 0.290 | 0.148 |
| 3.2             | 0.994 | 0.993 | 0.991 | 0.988 | 0.982 | 0.973 | 0.955 | 0.929 | 0.892 | 0.841 | 0.776 | 0.698 | 0.610 | 0.514 | 0.326 | 0.173 |
| 3.3             | 0.996 | 0.995 | 0.994 | 0.991 | 0.986 | 0.979 | 0.964 | 0.942 | 0.910 | 0.865 | 0.806 | 0.733 | 0.648 | 0.555 | 0.363 | 0.201 |
| 3.4             | 0.997 | 0.997 | 0.995 | 0.993 | 0.989 | 0.984 | 0.972 | 0.953 | 0.925 | 0.886 | 0.833 | 0.766 | 0.686 | 0.595 | 0.402 | 0.231 |
| 3.5             | 0.998 | 0.998 | 0.997 | 0.995 | 0.992 | 0.987 | 0.978 | 0.963 | 0.939 | 0.905 | 0.858 | 0.796 | 0.721 | 0.634 | 0.442 | 0.263 |
| 3.6             | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.996 | 0.994 | 0.990 | 0.983 | 0.970 | 0.951 | 0.921 | 0.879 | 0.824 | 0.755 | 0.672 | 0.483 | 0.297 |
| 3.7             | 0.999 | 0.999 | 0.998 | 0.997 | 0.996 | 0.993 | 0.987 | 0.977 | 0.960 | 0.935 | 0.899 | 0.849 | 0.786 | 0.708 | 0.524 | 0.333 |
| 3.8             | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.998 | 0.997 | 0.995 | 0.990 | 0.982 | 0.968 | 0.947 | 0.916 | 0.872 | 0.814 | 0.742 | 0.564 | 0.371 |
| 3.9             | 1.000 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.998 | 0.996 | 0.992 | 0.986 | 0.975 | 0.957 | 0.931 | 0.892 | 0.840 | 0.774 | 0.604 | 0.410 |
| 4.0             | 1.000 | 1.000 | 0.999 | 0.999 | 0.998 | 0.997 | 0.994 | 0.989 | 0.980 | 0.966 | 0.943 | 0.910 | 0.864 | 0.803 | 0.642 | 0.450 |

Эквивалентная запись этой вероятности через  $Q$ -функцию Маркума первого порядка имеет вид [17]:

$$P_1(r; \Delta; \sigma) = 1 - Q_1\left(\frac{\Delta}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right),$$

где  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а  $Q_1$  —  $Q$ -функция Маркума первого порядка. Такое распределение радиального отклонения возникает для двумерного кругового нормального распределения с ненулевым смещением центра [16–18].

Если СТП совпадает с точкой прицеливания, то есть  $\Delta = 0$ , распределение Райса переходит в распределение Рэлея, а вероятность попадания одного выстрела в круг радиусом  $a$  упрощается до выражения [16, 19]:

$$P_1(a; 0; \sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right).$$

Для  $n$  независимых выстрелов вероятность того, что хотя бы одно попадание окажется внутри круга радиусом  $a$ , в общем случае равна:

$$P_n(a; \Delta; \sigma) = 1 - [1 - P_1(a; \Delta; \sigma)]^n.$$

С учётом представления через  $Q$ -функцию Маркума:

$$P_n(a; \Delta; \sigma) = 1 - \left[Q_1\left(\frac{\Delta}{\sigma}, \frac{a}{\sigma}\right)\right]^n.$$

При совпадении СТП с точкой прицеливания, то есть при  $\Delta = 0$ , формула принимает вид:

$$P_n(a; 0; \sigma) = 1 - [1 - P_1(a; 0; \sigma)]^n = 1 - \exp\left(-\frac{na^2}{2\sigma^2}\right).$$

Таким образом, при круговом двумерном нормальном распределении попаданий и совпадении СТП с центром рассматриваемого круга радиальные отклонения имеют распределение Рэля. Из его функции распределения следуют соотношения [19]:  $P(D \leq \sigma) = 0,3935$ , то есть в круг радиусом  $a = \sigma$  попадает приблизительно 39,35% пробоин;  $P(D \leq 2\sigma) = 0,8647$ , то есть в круг радиусом  $a = 2\sigma$  попадает приблизительно 86,47% пробоин;  $P(D \leq 3\sigma) = 0,9889$ , то есть в круг радиусом  $a = 3\sigma$  попадает приблизительно 98,89% пробоин. Соответственно, за пределами радиуса  $3\sigma$  находится  $P(D > 3\sigma) = 0,0111$ , или приблизительно 1,11% пробоин. Функция распределения Рэля и её связь с длиной двумерного нормального вектора являются классическими результатами теории распределений [16, 19].

Для генерального кругового нормального распределения средний радиус рассеивания равен [19]:  $MR = 1,2533\sigma$ . Вероятность попадания в круг, радиус которого равен генеральному среднему радиусу  $MR$ , составляет:

$$P(D \leq MR) = 1 - \exp\left(-\frac{MR^2}{2\sigma^2}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0,5441.$$

Следовательно, в круг радиусом  $MR$ , центр которого совпадает с истинной СТП, попадает приблизительно 54,41% всех выстрелов. Круговое вероятное отклонение  $KBO_{50}$ , обозначаемое также  $CEP_{50}$  или  $R_{50}$ , представляет собой радиус круга, содержащего 50% попаданий. При круговом нормальном распределении и  $\Delta = 0$  оно равно [19, 20]:  $R_{50} = CEP_{50} = \sigma\sqrt{2\ln 2} = 1,1774\sigma$ , поскольку  $P(D \leq R_{50}) = 0,5$ . Таким образом,  $MR = 1,2533\sigma$ ,  $R_{50} = 1,1774\sigma$ ,  $MR \approx 1,0645R_{50}$ . Определение  $CEP$  как радиуса круга, содержащего заданную долю попаданий, и методы расчёта круговых вероятностей подробно рассмотрены в классических работах по статистической оценке кучности [20, 21].

Указанные соотношения для  $MR$  и  $R_{50}$  справедливы только тогда, когда радиусы отсчитываются от истинного центра рассеивания, то есть от истинного СТП, и  $\Delta = 0$ . Поэтому для расчёта  $MR$  и  $R_{50}$  как показателей именно кучности необходимо знать или оценить координаты СТП. Если расстояния измеряются от точки прицеливания при  $\Delta > 0$ , получаемые показатели учитывают одновременно случайное рассеивание и систематическое смещение СТП и характеризуют уже не только кучность, но и точность попадания [17, 21].

В эксперименте истинные координаты СТП неизвестны и заменяются выборочными средними координатами:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Поэтому рассчитанные по малой группе значения  $MR$ ,  $R_{50}$  и  $\sigma$  сами являются случайными оценками и обладают дополнительной выборочной неопределённостью.

Расчет показателей  $R_{50}$  и  $MR$  и вероятности попадания по этой таблице требует знания точных координат центра попадания относительно точки прицеливания. Чтобы определить вероятность попадания в цель, размер которой указан в МОА, нужно определить также в МОА стандартное отклонение  $\sigma$  и отклонение СТП от точки прицеливания  $\Delta$ .

Например, размер гонга 1 МОА, радиус гонга 0,5 МОА, стандартное отклонение  $\sigma = 0,5$  МОА, отклонение СТП от точки прицеливания  $\Delta = 1$  МОА. Считаем  $a/\sigma = 1$ ,  $\Delta/\sigma = 2$ . Заходим с этими значениями в таблицу 3 и на пересечении столбца и строки находим значение вероятности попадания в цель 0,082 или 8,2 %. Если размер цели указан в см, то нужно для этой дистанции значения  $\sigma$  и  $\Delta$  указать тоже в см. Если размер гонга 20 см, радиус гонга 10 см, стандартное отклонение для этой дистанции 10 см, отклонение СТП от точки прицеливания 20 см,  $a/\sigma = 1$ ,  $\Delta/\sigma = 2$ , и вероятность попадания также равна 8,2 %.

Таким образом, цепочка оценки кучности по размеру групп замыкается на вероятности попадания в цель. Зная среднее значение или вероятный диапазон размера групп, мы можем оценить среднее или вероятный диапазон стандартного отклонения  $\sigma$  и по нему определить вероятность попадания в цель. Например, можно сказать, что средний размер групп из 5 выстрелов примерно равен радиусу, который вбирает в себя 99 % попаданий в мишень.

Для большого числа выстрелов в группе, как мы уже говорили, лучше вместо размера применять средний радиус групп. Логика для него очень близка с той, которую мы применили к размеру группы. Расчеты и таблицы для него мы приведем в следующей статье.

Для демонстрации полученных результатов приведем реальный пример оценки кучности винтовки и вероятности попадания в цель по размеру групп. Винтовка Accugasy AX в калибре .308 Win, твист 12, пуля Scenar 185 gr, порох VihtaVuori 150, навеска 46 gr, капсюль RWS, гильза Lapua, скорость 850 м/с, температура +29 С (рис. 3). Используется для охоты на средних дистанциях. Настройка, проверка настройки и пристрелка были проведены в Центре настройки спортивно-стрелкового клуба им. Дмитрия Донского.



**Рисунок 3. а-винтовка Ассигасу АХ на стрелковом столе; б, в, – 5 контрольных групп по 3 выстрела после настройки винтовки**

После настройки винтовки было сделано 5 контрольных групп по 3 выстрела в каждой. В верхнем ряду (рис. 16) левая мишень имеет одну пробойну, а три правых по 3 пробойны. СТП всех трех групп находится примерно в одном месте. В нижнем ряду две группы по 3 выстрела делались при обнулении прицела, поэтому СТП меняла координаты после смещения марки прицела. Размер групп составил 0,22, 0,11, 0,18, 0,22 и 0,24 МОА, средний размер групп 0,194 МОА.

Определим кучность винтовки и вероятность попадания в цель. Входим в табл. 1 и находим 80 %-й интервал среднего значения экстремального размера группы. Он составляет 0,822–1,264. Пересчитываем на средний размер групп 0,194 МОА и получаем интервал среднего размера групп (0,159–0,245) МОА. Можно также оценить, в каком диапазоне можно было бы ожидать размер шестой группы. Для этого входим в табл. 2 и видим интервал 0,530–1,592. Пересчитываем на известный средний размер и получаем, что шестую группу можно было бы ожидать в диапазоне (0,103–0,309) МОА.

Для трех выстрелов в группе параметр  $\sigma$  связан с размером групп соотношением  $\sigma = 0,415 ES_3$ , откуда получаем доверительный интервал  $\sigma = (0,066–0,102)$  МОА. Примем для расчетов верхнюю оценку  $\sigma = 0,102$  МОА. После обнуления прицела координаты СТП относительно точки прицеливания в одной группе стали равны (0,04"; 0,14"), или на дистанции 100 метров (0,035; 0,122) МОА, то есть, радиальное отклонение СТП составляет примерно 0,127 МОА. Примем диаметр цели на дистанции 500 метров 10 см или 0,69 МОА

и определим вероятность попадания в нее без учета ошибок стрелка и влияния внешних условий. Вычислим отношения  $a/\sigma$  и  $\Delta/\sigma$  в МОА.  $a/\sigma = 0,345/0,102 = 3,38$ ,  $\Delta/\sigma = 0,127/0,102 = 1,25$ . Заходим в табл. 3 и видим цифру 0,972 или 97 %. Помним, что это оценка по верхней границе. Таким образом, по этим расчетам техническая кучность винтовки обеспечивает почти стопроцентное попадание в цель диаметром 10 см на дистанции 500 метров, то есть, практическая вероятность попадания в основном зависит от разброса начальной скорости и баллистического коэффициента, ошибок стрелка и влияния внешних условий. Для сравнения, если бы техническая кучность винтовки была не лучше 1 МОА, как у многих не настроенных винтовок, то вероятность попадания в эту цель была бы менее 10 %, и доминировала бы она, а ошибки стрелка и внешние условия вообще дополнительно свели бы вероятность к очень низкой цифре.

Следует отметить, что это условный расчет, основанный на предположении о постоянной угловой кучности с ростом дистанции от 100 до 500 метров.

То есть, получив средний размер 0,194 МОА на дистанции 100 метров, мы взяли такой же угловой размер для дистанции 500 метров. В действительности составляющие рассеивания неодинаково изменяются с дальностью. Ряд факторов является функцией дистанции и конкретных условий стрельбы. Нелинейно с дальностью изменяются составляющие, связанные с разбросом начальной скорости и баллистического коэффициента пули, скорости и направления ветра, изменением динамической устойчивости пули, трансзвуковыми эффектами и ряд других. Но это уже является предметом, выходящим за рамки настоящего исследования.

### Заключение

Экстремальный размер групп  $ES_n$  является простым и наглядным показателем кучности, но представляет собой случайную экстремальную характеристику, зависящую от числа выстрелов и использующую только две наиболее удаленные пробойны. Поэтому результат одной малой группы нельзя отождествлять ни с истинным средним размером, ни с размером следующей группы, ни с кучностью винтовки.

При круговом двумерном нормальном распределении попаданий размер групп  $ES_n$  определяется как диаметр облака из  $n$  случайных точек. Выборочное распределение размера групп удобно и надежно получать прямым моделированием координат с последующим точным вычислением всех попарных расстояний. Оно служит основой для расчета доверительных интервалов. Рассчитанные центральные 80%-е доверительные интервалы показывают диапазон истинного среднего  $\mu$ , а прогнозные интервалы — возможный размер следующей независимой группы.

GEV и Gamma являются аппроксимациями выборочного распределения  $ES_n$ . GEV часто лучше описывает форму одной группы, но может задавать физически неверную границу или тип хвоста. Двухпараметрическая Gamma-модель менее гибка, зато проста, положительна и удобна для инженерных расчетов. Ни одну из них не следует называть точным законом экстремального размера при конечном  $n$ .

С использованием закона распределения размера групп и его связь с показателями кучности винтовки определена вероятность попадания в цель в зависимости от размера групп.

Основное ограничение полученных результатов связано не с качеством генератора случайных чисел, а с исходной моделью. Таблицы предполагают независимые выстрелы, стационарную круговую нормальную дисперсию, отсутствие дрейфа СТП, изменения условий и отдельной популяции грубых отрывов. При нарушении этих предположений необходимо моделировать соответствующую эллиптическую, смешанную или нестационарную структуру, либо строить интервалы непосредственно по репрезентативным экспериментальным данным.

Результаты исследований отвечают на практические вопросы: сколько групп и сколько выстрелов в группе достаточно для оценки кучности винтовки, какой будет средний размер группы и размер очередной группы, как связан размер групп с кучностью спортивной винтовки и вероятностью попадания в цель.

Из проведенных исследований также следует, что практический результат испытаний на кучность целесообразно сообщать не одной цифрой, а набором параметров: число выстрелов  $n$ , число групп  $m$ , выборочный средний размер  $ES_n$ , доверительный интервал истинного среднего и, если требуется прогнозирование, интервал размера следующей группы.

### Список литературы

1. Богословский В.Н., Кадомкин В.В., Жуков И.Г. Показатели кучности спортивной и охотничьей винтовки. Аналитический обзор // Universum: технические науки. – 2024. – № 4. – DOI: 10.32743/UniTech.2024.121.4.17376. URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/17376> (дата обращения: 02.08.2026).
2. Богословский В.Н., Кадомкин В.В., Жуков И.Г. Математические модели, описывающие закономерности рассеивания пробоин и показатели кучности при спортивной стрельбе по мишеням. Аналитический обзор // Universum: технические науки. – 2024. – № 4. – DOI: 10.32743/UniTech.2024.121.4.17356. URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/17356> (дата обращения: 02.08.2026).
3. Богословский В.Н., Кадомкин В.В., Жуков И.Г. Оценка кучности спортивной винтовки по экстремальному размеру или среднему радиусу групп // Universum: технические науки. – 2024. – № 11. – DOI: 10.32743/UniTech.2024.128.11.18711. URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/18711> (дата обращения: 02.08.2026).
4. Богословский В.Н., Кадомкин В.В., Жуков И.Г. Показатели кучности спортивной и охотничьей винтовки. Аналитический обзор [Электронный ресурс]. // Universum: технические науки: электрон. научн. журн. – 2024. URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/17376> (дата обращения: 08.08.2026).
5. Ballistipedia: [сайт] [Электронный ресурс]. URL: <https://ballistipedia.com/> (дата обращения: 02.08.2026).
6. Coles S. An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values. – London: Springer, 2001. – 208 P. – DOI: 10.1007/978-1-4471-3675-0.



7. Demichel Y., Fermin A.K., Soulier P. The diameter of an elliptical cloud // *Electronic Journal of Probability*. – 2015. – Т. 20, № 27. – P. 1–32. – DOI: 10.1214/EJP.v20-3777.
8. DiDonato A.R., Jarnagin M.P. Integration of the General Bivariate Gaussian Distribution over an Offset Circle // *Mathematics of Computation*. – 1961. – Т. 15, № 76. – P. 375–382. – DOI: 10.1090/S0025-5718-1961-0129116-8.
9. Grubbs F.E. Approximate Circular and Noncircular Offset Probabilities of Hitting // *Operations Research*. – 1964. – Т. 12, № 1. – P. 51–62. – DOI: 10.1287/opre.12.1.51.
10. Harter H.L. Circular Error Probabilities // *Journal of the American Statistical Association*. – 1960. – Т. 55, № 292. – P. 723–731. – DOI: 10.1080/01621459.1960.10483372.
11. Jammalamadaka S.R., Janson S. Asymptotic distribution of the maximum interpoint distance in a sample of random vectors with a spherically symmetric distribution // *The Annals of Applied Probability*. – 2015. – Т. 25, № 6. – P. 3571–3591. – DOI: 10.1214/14-AAP1082.
12. Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. *Continuous Univariate Distributions*. 2nd ed. Vol. 1. New York: John Wiley & Sons, 1994. 756 P.
13. Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. *Continuous Univariate Distributions*. Vol. 1. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1994. XIX, 756 P.
14. Lao W., Mayer M. U-max-statistics // *Journal of Multivariate Analysis*. – 2052. – Т. 99, № 9. – P. 2039–2052. – DOI: 10.1016/j.jmva.2008.02.001.
15. Matthews P.C., Rukhin A.L. Asymptotic distribution of the normal sample range // *The Annals of Applied Probability*. – 1993. – Т. 3, № 2. – P. 454–466. – DOI: 10.1214/aoap/1177005433.
16. NumPy Developers. Permuted congruential generator (64-bit, PCG64 DXSM) [Электронный ресурс]. URL: [https://numpy.org/doc/stable/reference/random/bit\\_generators/pcg64dxsm.html](https://numpy.org/doc/stable/reference/random/bit_generators/pcg64dxsm.html) (дата обращения: 02.08.2026).
17. NumPy Developers. numpy.random.Generator.standard\_normal [Электронный ресурс]. URL: [https://numpy.org/doc/stable/reference/random/generated/numpy.random.Generator.standard\\_normal.html](https://numpy.org/doc/stable/reference/random/generated/numpy.random.Generator.standard_normal.html) (дата обращения: 02.08.2026).
18. Nuttall A.H. Some Integrals Involving the QM Function // *IEEE Transactions on Information Theory*. – 1975. – Т. 21, № 1. – P. 95–96. – DOI: 10.1109/TIT.1975.1055327.
19. Rice S.O. Mathematical Analysis of Random Noise // *Bell System Technical Journal*. – 1945. – Т. 24, № 1. – P. 46–156. – DOI: 10.1002/j.1538-7305.1945.tb00453.x.
20. SciPy Developers. scipy.stats.genextreme [Электронный ресурс]. URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.genextreme.html> (дата обращения: 02.08.2026).
21. Taylor M.S., Grubbs F.E. Approximate probability distributions for the extreme spread // *Naval Research Logistics Quarterly*. – 1975. – Т. 22, № 4. – P. 713–719. – DOI: 10.1002/nav.3800220407.
22. Wollschläger D. Statistical analysis of shooting results with the R shotGroups package [Электронный ресурс]. CRAN. – 2025. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/shotGroups/vignettes/shotGroups.pdf> (дата обращения: 02.08.2026).

## References

1. Bogoslovsky V.N., Kadomkin V.V., Zhukov I.G. Accuracy Metrics of Sporting and Hunting Rifles: An Analytical Review // *Universum: Technical Sciences*. – 2026. – № 4. – DOI: 10.32743/UniTech.2024.121.4.17376. – URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/17376>. (accessed 04.09.2026)
2. Bogoslovsky V.N., Kadomkin V.V., Zhukov I.G. Mathematical Models Describing Bullet-Hole Dispersion Patterns and Accuracy Metrics in Competitive Target Shooting: An Analytical Review // *Universum: Technical Sciences*. – 2026. – № 4. – DOI: 10.32743/UniTech.2024.121.4.17356. – URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/17356>. (accessed 04.09.2026)
3. Bogoslovsky V.N., Kadomkin V.V., Zhukov I.G. Assessment of Sporting Rifle Accuracy by the Extreme Spread or Mean Radius of Shot Groups // *Universum: Technical Sciences*. – 2026. – № 11. – DOI: 10.32743/UniTech.2024.128.11.18711. – URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/18711>. (accessed 04.09.2026)
4. Bogoslovsky V.N., Kadomkin V.V., Zhukov I.G. Accuracy Indicators of Sporting and Hunting Rifles. Analytical Review // *Universum: Technical Sciences: electronic scientific journal*. – 2024. – № 4. – URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/17376> (дата обращения: 08.08.2026).
5. Ballistipedia: [сайт] – URL: <https://ballistipedia.com/> (дата обращения: 02.08.2026).
6. Coles S. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. – London: Springer, 2001. – 208 P. – DOI: 10.1007/978-1-4471-3675-0.
7. Demichel Y., Fermin A.K., Soulier P. The diameter of an elliptical cloud // *Electronic Journal of Probability*. – 2015. – T. 20, № 27. – P. 1–32. – DOI: 10.1214/EJP.v20-3777.
8. DiDonato A.R., Jarnagin M.P. Integration of the General Bivariate Gaussian Distribution over an Offset Circle // *Mathematics of Computation*. – 1961. – T. 15, № 76. – P. 375–382. – DOI: 10.1090/S0025-5718-1961-0129116-8.
9. Grubbs F.E. Approximate Circular and Noncircular Offset Probabilities of Hitting // *Operations Research*. – 1964. – T. 12, № 1. – P. 51–62. – DOI: 10.1287/opre.12.1.51.
10. Harter H.L. Circular Error Probabilities // *Journal of the American Statistical Association*. – 1960. – T. 55, № 292. – P. 723–731. – DOI: 10.1080/01621459.1960.10483372.
11. Jammalamadaka S.R., Janson S. Asymptotic distribution of the maximum interpoint distance in a sample of random vectors with a spherically symmetric distribution // *The Annals of Applied Probability*. – 2015. – T. 25, № 6. – P. 3571–3591. – DOI: 10.1214/14-AAP1082.
12. Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. *Continuous Univariate Distributions*. 2nd ed. Vol. 1. New York: John Wiley & Sons, 1994. 756 P.
13. Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. *Continuous Univariate Distributions*. Vol. 1. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1994. XIX, 756 P.
14. Lao W., Mayer M. U-max-statistics // *Journal of Multivariate Analysis*. – 2052. – T. 99, № 9. – P. 2039–2052. – DOI: 10.1016/j.jmva.2008.02.001.

15. Matthews P.C., Rukhin A.L. Asymptotic distribution of the normal sample range // The Annals of Applied Probability. – 1993. – Т. 3, № 2. – P. 454–466. – DOI: 10.1214/aoap/1177005433.
16. NumPy Developers. Permuted congruential generator (64-bit, PCG64 DXSM) – URL: [https://numpy.org/doc/stable/reference/random/bit\\_generators/pcg64dxsm.html](https://numpy.org/doc/stable/reference/random/bit_generators/pcg64dxsm.html) (дата обращения: 02.08.2026).
17. NumPy Developers. numpy.random.Generator.standard\_normal – URL: [https://numpy.org/doc/stable/reference/random/generated/numpy.random.Generator.standard\\_normal.html](https://numpy.org/doc/stable/reference/random/generated/numpy.random.Generator.standard_normal.html) (дата обращения: 02.08.2026).
18. Nuttall A.H. Some Integrals Involving the QM Function // IEEE Transactions on Information Theory. – 1975. – Т. 21, № 1. – P. 95–96. – DOI: 10.1109/TIT.1975.1055327.
19. Rice S.O. Mathematical Analysis of Random Noise // Bell System Technical Journal. – 1945. – Т. 24, № 1. – P. 46–156. – DOI: 10.1002/j.1538–7305.1945.tb00453.x.
20. SciPy Developers. scipy.stats.genextreme – URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.genextreme.html> (дата обращения: 02.08.2026).
21. Taylor M.S., Grubbs F.E. Approximate probability distributions for the extreme spread // Naval Research Logistics Quarterly. – 1975. – Т. 22, № 4. – P. 713–719. – DOI: 10.1002/nav.3800220407.
22. Wollschläger D. Statistical analysis of shooting results with the R shotGroups package CRAN. – 2025. – URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/shotGroups/vignettes/shotGroups.pdf> (дата обращения: 02.08.2026).